Matrikel								SKZ				Name	

Klausur 2

Formale Grundlagen 2

12. Januar 2007

Zu jedem Buchstaben muß entweder ja oder nein angekreuzt werden.

Aufgabe 1 *Gegeben sei eine Turingmaschine M mit folgender Eigenschaft: Wenn M ein Wort akzeptiert, dann tut sie das in weniger als 1000 Schritten.*

A	ja	

Ist $L(M)$ rekursiv aufzählbar?

B	ja	

Ist $L(M)$ rekursiv?

Starte M mit der Eingabe w und führe 1000 Berechnungsschritte durch. Wurde w in dieser Zeit akzeptiert, so gilt $w \in L(M)$, andernfalls gilt $w \notin L(M)$. Daraus folgt sofort, dass $L(M)$ auch rekursiv aufzählbar ist.

C		nein

Ist $L(M)$ notwendigerweise endlich?

Sei M die Turingmaschine, die – ohne eine Berechnung durchzuführen – sofort in einen akzeptierenden Zustand übergeht und anhält, dann ist $L(M) = \Sigma^*$.

D	ja	

Gegeben seien zwei Turingmaschinen M_1 und M_2. Kann man eine Turingmaschine konstruieren, die eine Eingabe w genau dann akzeptiert, wenn wenigstens eine der Maschinen M_1 oder M_2 das Eingabewort w akzeptiert?

Man konstruiert das Kreuzprodukt von M_1 und M_2.

E	ja	

Kann man eine 2-Band-Turingmaschine mittels einer 1-Band-Turingmaschine simulieren?

Mittels Spurtechnik.

Aufgabe 2 *Die Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ seien folgendermaßen definiert:*

$$
\begin{aligned}
f(x) &:= \begin{cases} y & \text{falls } x = y^3 \\ \text{nicht def.} & \text{sonst} \end{cases} \\
g(x) &:= \min_y P(y,x) \quad \text{mit } P(y,x) \equiv y = x^3.
\end{aligned}
$$

A		nein

Ist f primitiv rekursiv?

f ist eine partielle Funktion und kann somit nicht primitiv rekursiv sein.

B	ja	

Ist f Turing-berechenbar?

f ist rekursiv und damit Turing-berechenbar.

C	ja	

Ist g primitiv rekursiv?

g berechnet einfach die dritte Potenz des Eingabewertes. Damit ist klar, dass g primitiv rekursiv ist, und damit natürlich auch rekursiv ist.

D	ja	

Ist g rekursiv?

E	ja	

Ist $x^{x!}$ primitiv rekursiv?

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sowohl $x!$ als auch x^y primitiv rekursiv ist. Mittels Komposition kann man nun leicht die gegebene Funktion konstruieren.

F	ja	

Ist $\min(x,y)$ primitiv rekursiv?

$\min(x,y) = \frac{1}{2}(|x+y| \dot{-} |x-y|)$

Aufgabe 3 *Für eine beliebige Zahl $z \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f_z(n)$ folgendermaßen definiert: $f_z(n) = 1$, falls in der Dezimaldarstellung von z eine zusammenhängende Folge von n Nullen auftritt, und $f_z(n) = 0$, wenn dies nicht der Fall ist. Für z sind die Spezialfälle $a = \frac{100}{99} = 1,010101...$ und $\pi = 3,141592...$ zu untersuchen.*

A	ja	

Ist $f_a(n)$ Turing-berechenbar?

Klar, denn $f_a(1) = 1$ und $f_a(n) = 0\ \forall n > 1$.

B	ja	

Ist $f_\pi(n)$ Turing-berechenbar? Überlegen Sie sich, welche Formen die Abbildung $f_\pi(n)$ haben kann und ob diese durch eine Turingmaschine realisierbar wären!

Wir wissen zwar nicht, wie die Funktion $f_\pi(n)$ genau aussieht, aber sie ist entweder eine Sprungfunktion (ähnlich wie im Fall $f_a(n)$) oder konstant 1. In beiden Fällen ist $f_\pi(n)$ berechenbar (und sogar primitiv rekursiv!).

Aufgabe 4 *Gelten folgende Aussagen über die Komplexität von Funktionen?*

A		nein	$n^2 = \mathcal{O}\left(\sqrt{n^3}\right)$
B	ja		$(2n)^4 = \mathcal{O}(n^4)$
C	ja		$\log(2^{2n}) = \mathcal{O}\big(\log(2^n)\big)$
D		nein	$\exp(2n) = \mathcal{O}\big(\exp(n)\big)$
E		nein	$\sqrt[1000]{2^n} = \mathcal{O}(n^{1000})$
F		nein	$\log n = \mathcal{O}\big(\log(\log n)\big)$
G	ja		$(\log n)^{10} = \mathcal{O}(n)$