Aufgabe 31. Man definiere die Funktionen $\varphi_d(x,y) = x^y$, $\varphi_e(x,y) = x \dot{-} 1$, $\varphi_f(x,y) = x \dot{-} y$ und $\varphi_g(x,y) = |x-y|$ (Beispiel 1.5.1 Skriptum) formal durch Komposition und primitive Rekursion, ausgehend von den Grundfunktionen und von Funktionen für die eine solche Darstellung bereits angegeben wurde.

Aufgabe 32. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die (partielle) Funktion

$$f(x) = \begin{cases} y & \text{falls } x = y^2 \\ \text{nicht definiert} & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Stellen Sie diese Funktion mittels der Grundfunktionen, der Komposition, Rekursion und Minimalisierung dar. Dabei dürfen Sie zusätzlich als bekannt voraussetzen, daß die Funktion $m : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x,y) \mapsto x \cdot y$ und das Gleichheitsprädikat $d : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y, \\ 0 & \text{falls } x \neq y, \end{cases}$$

   primitiv rekursiv sind.

2. Warum kommt man bei dieser Darstellung nicht ohne die Minimalisierung aus?

Aufgabe 33. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie.

1. $\log(n^{100})$ ist $O(n)$
2. $\exp(n^{100})$ ist $O(n)$
3. $2n$ ist $O(n)$
4. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt: $\sqrt{e^n}$ ist $O(e^{\varepsilon n})$.
5. Für alle $\varepsilon > 0$ und für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt $\mathrm{e}^{\varepsilon n}$ ist $O(n^k)$
6. Für alle $\varepsilon > 0$ und für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt $\mathrm{e}^{\varepsilon n}$ ist $O(k^n)$
7. 2^n ist $O(8^n)$
8. 8^n ist $O(2^n)$

Aufgabe 34. Zur Berechnung eines Problems stehen zwei Algorithmen A und B zur Verfügung. Für deren jeweilige Komplexität (= Laufzeit auf Instanzen der Größe n) gelte

$$t_A(n) = \sqrt{n} \quad \text{bzw.} \quad t_B(n) = 2^{\sqrt{\log_2 n}}.$$

1. Welcher der beiden Algorithmen ist asymptotisch besser (= schneller), d. h. gilt $t_A(n) \leq t_B(n)$ oder $t_B(n) \leq t_A(n)$ für $n \to \infty$?
2. Wo liegt der break-even point, d. h. von welchem Wert der Instanzengröße n an ist der asymptotisch bessere Algorithmus immer im Vorteil?

Aufgabe 35. Beweisen Sie: Seien $f(n)$ und $g(n)$ von der Ordnung $O(n)$. Dann gilt:

1. $(f+g)(n)$ ist von der Ordnung $O(n)$;
2. $(f \cdot g)(n)$ ist von der Ordnung $O(n^2)$.

Zeigen oder widerlegen Sie: Falls $g(n)$ von der Ordnung $O(f(n))$ ist, ist auch $2^{g(n)}$ von der Ordnung $O(2^{f(n)})$.