Aufgabe 26. Eine Turingmaschine wurde definiert als ein 6-tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta)$$

wobei $\Sigma \subseteq \Gamma$, $q_0 \in Q$, $F \subseteq Q$ und δ eine partielle Funktion $Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$ ist. Ein Produkt zweier Turingmaschinen $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \Gamma_1, q_{1,0}, F_1, \delta_1)$ und $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \Gamma_2, q_{2,0}, F_2, \delta_2)$ ist ein 6-tupel

$$M_1 \times M_2 = (Q_1 \times Q_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2, \Gamma_1 \times \Gamma_2, (q_{1,0}, q_{2,0}), F, \delta_1 \times \delta_2)$$

mit $F \subseteq Q_1 \times Q_2$. Für Paare $(q_1, \gamma_1) \in Q_1 \times \Gamma_1$ und $(q_2, \gamma_2) \in Q_2 \times \Gamma_2$ im Definitionsbereich von δ_1 bzw δ_2 mit $\delta_i(q_i, \gamma_i) = (p_i, g_i, m_i)$ $(i = 1, 2)$ ist

$$\delta_1 \times \delta_2(q_1, q_2, \gamma_1, \gamma_2) = (p_1, p_2, g_1, g_2, m_1, m_2).$$

$M_1 \times M_2$ hat eine natürliche Interpretation als Turingmaschine mit zwei Bändern. Im Falle, dass $\Sigma_1 = \Sigma_2$, kann durch Modifikation der Überführungsfunktion $\delta_1 \times \delta_2$ und bei passender Wahl der Menge F der zu akzeptierenden Zustände, $M_1 \times M_2$ zum Erkennen boolescher Kombinationen von $L(M_1)$ und $L(M_2)$ verwendet werden.
In den folgenden Tabellen sind zwei Turingmaschinen M_1 und M_2 mit $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \{0, 1\}$ gegeben.

M_1	0	1	X	Y	$\sqcup$
p_0	p_1XR	$-$	$-$	p_3YR	$-$
p_1	p_10R	p_2YL	$-$	p_1YR	$-$
p_2	p_20L	$-$	p_0XR	p_2YL	$-$
p_3	$-$	$-$	$-$	p_3YR	$p_4\sqcup R$
p_4	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

M_2	0	1	$\sqcup$
q_0	q_10R	q_21R	$-$
q_1	$-$	q_21R	$q_3\sqcup S$
q_2	q_10R	$-$	$q_3\sqcup S$
q_3	$-$	$-$	$-$

Die Endzustände von M_1 bzw. M_2 sind p_4 bzw q_3.

1. Beschreiben Sie die Sprachen $L(M_1)$ und $L(M_2)$.
2. Wie sind M_1 und M_2 zu M_1' und M_2' zu modifizieren und wie ist F für $M_1 \times M_2$ festzulegen, so dass $L(M_1' \times M_2') = L(M_1) \cap L(M_2)$ gilt.
3. Wie sind M_1 und M_2 zu M_1' und M_2' zu modifizieren und wie ist F für $M_1 \times M_2$ festzulegen, so dass $L(M_1' \times M_2') = L(M_1) \cup L(M_2)$ gilt.

Aufgabe 27. Gegeben sei die Sprache $L = \{(ab^m)^n \mid m, n \in \mathbb{N},\ m, n > 0\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie eine explizite Beschreibung (Zustände, Überführungsfunktion) einer einbändigen Turingmaschine M, mit $L(M) = L$.

Aufgabe 28. Skizzieren Sie eine Überlegung, warum jede Turingmachine mit k Bändern durch eine Turingmaschine mit nur einem Band simuliert werden kann.

Aufgabe 29. Seien M_1, M_2 zwei Turingmaschinen und seien $L_1 = L(M_1)$ und $L_2 = L(M_2)$ die zugehörigen akzeptierten Sprachen. Man könnte versuchen, eine Prozedur (im intuitiven Sinn) zum Akzeptieren von $L_1 \cup L_2$ wie folgt zu beschreiben:

> Man gebe ein gegebenes Inputwort x zunächst als Input für M_1; falls x von M_1 akzeptiert wird, wird x durch die Prozedur akzeptiert. Anderenfalls gebe man x als Input für M_2 und akzeptiere x falls M_2 das Wort x akzeptiert.

1. Was stimmt an diesem Argument nicht?
2. Man gebe eine verfeinerte Prozedur an, welche $L_1 \cup L_2$ tatsächlich akzeptiert.
3. Man zeige, daß auch $L_1 \cap L_2$ von einer geeigneten Prozedur (im intuitiven Sinn) akzeptiert wird.

Anmerkung: Die Prozeduren aus den letzten beiden Punkten lassen sich ohne weiteres auf Turingmaschinen implementieren; $L_1 \cup L_2$ und $L_1 \cap L_2$ werden also ebenfalls von geeigneten Turingmaschinen akzeptiert.

Aufgabe 30. Seien L_1 und L_2 zwei Sprachen über dem Alphabet Σ. Die Verkettung von L_1 und L_2 ist definiert als

$$L_1 \circ L_2 := \{w \mid \exists u \in L_1\ \exists v \in L_2 : w = uv\}.$$

Zeigen Sie: Sind L_1 und L_2 rekursiv aufzählbar, dann ist auch $L_1 \circ L_2$ rekursiv aufzählbar.
Hinweis: Konstruieren Sie eine Turingmaschine für die Sprache $L_1 \circ L_2$.