Aufgabe 1. Man gebe zwei natürliche Zahlen m, n an derart, daß der Euklidische Algorithmus für Input m, n genau fünf Divisionsschritte benötigt (d.h., die Hauptschleife wird genau fünfmal ausgeführt).
Bestimmen Sie das kleinste Paar.

Aufgabe 2. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n)$$

mittels vollständiger Induktion.

Aufgabe 3. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß ein vollständiger binärer Baum der Tiefe n genau $2^n - 1$ Knoten hat.
Dabei definieren wir einen vollständigen binären Baum der Tiefe n rekursiv wie folgt: Ein einzelner Knoten ist ein vollständiger binärer Baum der Tiefe 1. Ein vollständiger binärer Baum der Tiefe $n+1$ ist ein Baum, an dessen Wurzelknoten genau zwei vollständige binäre Bäume der Tiefe n hängen.

Aufgabe 4. Ein Hyperwürfel Q_n hat als Eckenmenge alle $0, 1$-Folgen der Länge n. Eine Kante ist eine Verbindung zwischen zwei Ecken, deren Folgen sich an genau einer Stelle unterscheiden. Zeigen Sie, daß Q_n genau $n2^{n-1}$ Kanten hat.

Aufgabe 5. Im folgenden wird die Aussage „In jeder Schafherde haben alle Schafe dieselbe Farbe“ mittels vollständiger Induktion bewiesen. Finden Sie den Fehler!
Induktionsanfang: Für eine Schafherde, die nur aus einem einzigen Schaf besteht, ist die Behauptung offensichtlich wahr.
Induktionshypothese: In jeder Herde mit n Schafen haben alle dieselbe Farbe.
Induktionsschluss: Gegeben sei eine Schafherde M der Kardinalität $n + 1$. Wir wählen nun beliebig n Schafe aus und bezeichnen diese Menge als M_1. Gemäß Induktionshypothese haben alle Schafe in M_1 dieselbe Farbe. Wenn wir nun ein beliebiges Schaf aus M_1 entfernen und stattdessen das zuvor übriggebliebene Schaf hinzufügen, erhalten wir eine Menge, die wir M_2 nennen. M_2 enthält ebenfalls genau n Schafe, die also – laut Induktionshypothese – alle dieselbe Farbe haben. Folglich haben alle Schafe in $M = M_1 \cup M_2$ dieselbe Farbe.